

## 1. Einleitung

Im Jahre 1956 kam es in Avon, Kalifornien, bei der hydrostatischen Prüfung eines großen zylindrischen Behälters mit einem flachen Bodenabschluß, bestehend aus einer Kugelkalotte und einem torusförmigen Übergangsstück, zum Beulversagen des Behälters [1]. Dieser Umstand weckte in Fachkreisen das Interesse für eine genauere Analyse derartiger Schalenkonstruktionen. Man besann sich der bekannten Tatsache, daß unter Innendruck im torusförmigen Übergangsstück Druckspannungen auftreten, die der Grund für vielwelliges Ausbeulen in Umfangsrichtung, sogenanntes „wrinkling“, in diesem Bereich sind. In diesem Zusammenhang sei zum Beispiel Flügge [2] angeführt, der im Rahmen der Untersuchung einer zylindrischen Kesseltrommel mit Abschlußböden von der Form flacher Drehellipsoide gezeigt hat, daß unter Innendruck im Bereich des Überganges vom Zylinder zum Drehellipsoid eine Zone mit Ringdruckspannungen entsteht.

In einem im Jahre 1959 erschienenem Aufsatz untersuchte Galletly [3] einen zylindrischen Kessel mit einem torus-kugelförmigen Abschlußboden. Galletly weist zunächst darauf hin, daß sich die Membrantheorie nicht zur Lösung des vorliegenden Problems eignet. Im weiteren entwickelt er Differentialgleichungen auf der Grundlage der Biegetheorie und integriert diese numerisch unter Verwendung finiter Differenzen.

Shield und Drucker [4] argumentieren plausibel, daß ein dünnwandiger Behälter unter Innendruck umso besser ausgenutzt ist, je weitgehender Druckspannungen ausgeschaltet werden können. Diese Autoren stellen in ihrer Arbeit dem entwerfenden Ingenieur Daten und Konstruktionsregeln für Behälterabschlußböden torus-kugelförmiger (Bild 1) oder torus-kegelförmiger Gestalt zur Verfügung. Shield und Drucker weisen darauf hin, daß die eingangs erwähnte Instabilitätsform jedenfalls für sehr dünne Schalen zutrifft.

Adachi und Benicek [5] untersuchten torus-kugelförmige Abschlußböden experimentell. Bushnell und Galletly [6] führten elasto-plastische Analysen von Behälterabschlußböden unter Berücksichtigung nichtlinearer Vorbeulverhaltens durch. Dabei stellten sie fest, daß die Berücksichtigung des Einflusses der Rotationen auf die Membranverzerrungen vor dem Ausbeulen im gegenständlichen Fall verstetigend wirkt, also eine Erhöhung der rechnerischen Beuldrücke bedingt. Verschiedene Abschlußböden wurden von Galletly, Kirk und Gill experimentell untersucht und anschließend von Bushnell unter Benutzung des auf Finiten Differenzen beruhenden Computerprogrammes BOSOR 5 analysiert.

Bushnell [7] untersuchte sowohl ellipsoidförmige als auch toruskugelförmige Abschlußböden auf Stabilität unter Zuhilfenahme des zuvor erwähnten Computerprogrammes. Er fand heraus, daß der Beuldruck bei weniger dünnwandigen Abschlußböden sowohl von physikalischer als auch von geometrischer Nichtlinearität vor dem Ausbeulen beeinflußt wird. Grob gesprochen führt im gegenständlichen Fall die Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearität zu einer Erhöhung des Beuldruckes, während bei Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearität das Gegenteil eintritt.

Die angeführten Arbeiten enthalten wertvolle Diagnosen des Sachverhaltes. Offen bleibt jedoch die Frage, ob die eingangs erwähnten Druckspannungen bei Ausschaltung der Krümmungssprünge an den beiden Enden des Übergangsstückes abnehmen und dadurch die Beulsicherheit günstig beeinflussen. Zur Klärung dieser Frage werden in der vorliegenden Arbeit Übergangsstücke mit Erzeugenden von der Form sogenannter hyperoskulatatorischer Polynome gewählt, die einen stetigen Krümmungsübergang an den Anschlüssen an die Kalotte oder den Zylinder gewährleisten. Darüber hinaus wird durch Vergrößerung der Entwicklungshöhe des Übergangsstückes eine Verkleinerung des Krümmungsmaximums angestrebt. Bild 1 verdeutlicht die geschilderte Zielsetzung der Arbeit.

Die Grundlage für die numerische Untersuchung stellt ein an der Cornell University entwickeltes Computerprogramm namens FESIA (Finite Element Shell Instability Analysis) [8] dar, an dessen Vollkommenung und Weiterentwicklung in den letzten Jahren am Institut für Baustatik und Festigkeitslehre der Technischen Universität Wien intensiv gearbeitet worden ist.

Die vorliegende Arbeit umfaßt die Formulierung des Deformations- und des Stabilitätsproblems, die Beschreibung der geometrischen Form des Übergangsstückes und die numerische Untersuchung. Der

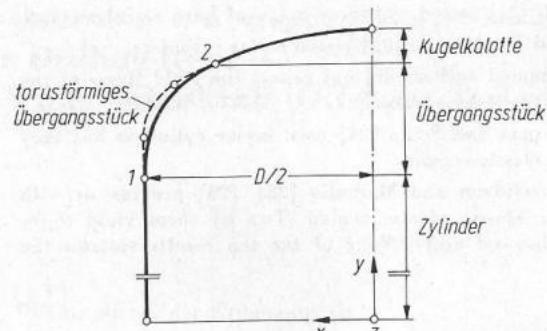


Bild 1. Axialschnitt durch Behälterabschlußboden

formulative Teil der Arbeit ist bewußt knapp gehalten, da in der einschlägigen Literatur ein reichhaltiges Angebot an verwandten Formulierungen auf der Grundlage der Methode der Finiten Elemente (FEM) vorhanden ist. Da es bei dieser Arbeit in erster Linie um einen Vergleich des Einflusses verschiedener geometrischer Anordnungen auf den Beuldruck geht, reicht es hin, der numerischen Untersuchung lineares Vorbeulverhalten zugrunde zu legen.

## 2. Formulierung des Deformations- und des Stabilitätsproblems

### 2.1 Verschiebungszustand

Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}^{(e)}$  des dreiecksförmigen, gekrümmten Finiten Elementes  $e$  (Bild 2) mit den Komponenten  $u^{(e)}$ ,  $v^{(e)}$  und  $w^{(e)}$  läßt sich durch Knotenpunktsverschiebungen  $\mathbf{q}^{(e)}$  und Verlaufsfunktionen  $\psi^{(e)}$  wie folgt darstellen:

$$\mathbf{u}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \\ w^{(e)} \end{Bmatrix} = \psi^{(e)} \cdot \mathbf{q}^{(e)} \quad \dots \quad (1)$$

Der Vektor der unbekannten Lagekoordinaten ist zu

$$\mathbf{q}^T = \left[ (u)_1 \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)_1 \left( \frac{\partial u}{\partial \beta} \right)_1 (v)_1 \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)_1 \left( \frac{\partial v}{\partial \beta} \right)_1 (w)_1 \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)_1 \right. \\ \left. \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)_1 (u)_2 \dots \left( \frac{\partial w}{\partial \beta} \right)_3 (u)_4 (v)_4 (w)_4 \right] \quad \dots \quad (2)$$

gegeben, wobei  $\mathbf{q}^T$  für die Transponierte von  $\mathbf{q}$  steht. Mit  $\alpha$  und  $\beta$  werden krummlinige, orthogonale Koordinaten (s. Bild 2) bezeichnet. Die Verlaufsfunktionen  $\psi$  sind in [9] angegeben.

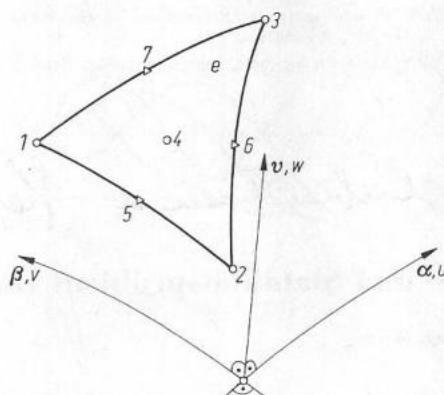


Bild 2. Dreiecksförmiges, gekrümmtes Finites Element

Bei Anwendung des klassischen Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie erfüllen die Verschiebungsfunktionen zwar Inter-elementskontinuität in den Verschiebungen (sogenannte  $C_0$ -Inter-elementskontinuität) nicht aber in den Tangentendrehungen normal zum Rand (sogenannte  $C_1$ -Interelementskontinuität). Hingegen kann bei Benutzung eines sogenannten Prinzips vom stationären Wert einer modifizierten Form der potentiellen Energie in jedem Punkt des Elementsrandes  $C_1$ -Interelementskontinuität hergestellt werden [9].

## 2.2 Verzerrungszustand

Es gelangt eine Schalentheorie kleiner Verzerrungen und sogenannter „mäßiger großer“ Rotationen zur Anwendung, die auf Koiter [10] zurückgeht. Bei dieser Schalentheorie enthalten die Ausdrücke für die Verzerrungen der Schalenmittelfläche jeweils einen in den Rotationen quadratischen Term. Die Ausdrücke für die Krümmungsänderungen sind hingegen linear [10].

## 2.3 Schnittgrößen

Der Vektor der Schnittgrößen

$$\mathbf{t}^T = [\mathbf{n}^T \mathbf{m}^T] = [n_{\alpha\alpha} n_{\beta\beta} n_{\alpha\beta} m_{\alpha\alpha} m_{\beta\beta} m_{\alpha\beta}] \quad \dots \quad (3)$$

setzt sich aus dem Subvektor  $\mathbf{n}$  der inneren Kräfte und dem Subvektor  $\mathbf{m}$  der inneren Momente zusammen. Unter Beachtung des Hookeschen Gesetzes erhält man den Zusammenhang zwischen dem Vektor der Schnittgrößen und dem Vektor der Verzerrungen der Mittelfläche bzw. der Krümmungsänderungen [9].

## 2.4 Modifizierte potentielle Energie

Die zuvor erwähnte modifizierte Form der potentiellen Energie lässt sich formal zu

$$\Pi^* = \Pi + \Gamma \quad \dots \quad (4)$$

anschreiben, wobei

$$\Pi = U + V \quad \dots \quad (5)$$

die klassische potentielle Energie darstellt und  $\Gamma$  ein sogenanntes Ergänzungsfunktional symbolisiert.  $U$  ist die Verzerrungsenergie und  $V$  das Potential der äußeren Kräfte. Das Ergänzungsfunktional ergibt sich zu

$$\Gamma = \sum_{l=1}^r \Delta \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \right)_M \lambda \quad \dots \quad (6)$$

wobei  $\Delta \left( \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} \right)_M$  den auf den Mittelpunkt  $M$  der Parameterabbildung des betreffenden Elementsrandes bezogenen Unterschied in den partiellen Ableitungen von  $\mathbf{w}$  normal zu diesem Rand darstellt [11];  $\lambda$  bezeichnet einen Lagrangeschen Multiplikator, mit dessen Hilfe im erwähnten Seitenmittelpunkt (s. die Punkte 5, 6, 7 in Bild 2)  $C_1$ -Interelementskontinuität erzwungen wird. Dies bedeutet im gegenständlichen Fall, daß längs des gesamten Randes Neigungskontinuität gegeben ist.

## 2.5 Deformationsproblem

Die Lösung erfolgt mit Hilfe der Stationaritätsbedingung [9]

$$\delta \Pi^* = \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{K}_T \mathbf{q} + \mathbf{C}^T \lambda - \mathbf{P}) + \delta \lambda^T \mathbf{C} \mathbf{q} = 0 \quad \dots \quad (7)$$

Die Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  ergibt sich zu [9]

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \mathbf{N}_1(\mathbf{q}) + \mathbf{N}_2(\mathbf{q}^2) \quad \dots \quad (8)$$

wobei  $\mathbf{K}$  die klassische Steifigkeitsmatrix ist und  $\mathbf{N}_1(\mathbf{q})$  und  $\mathbf{N}_2(\mathbf{q}^2)$  die erste bzw. zweite geometrische Steifigkeitsmatrix ist. In Gleichung (7) bedeutet  $\mathbf{C}$  die Koeffizientenmatrix in der algebraisierten Form der Zwangsbedingungen für die Elementsränder;  $\mathbf{P}$  stellt den Vektor energetisch äquivalenter Knotenkräfte für die gegebene Belastung dar.

## 2.6 Stabilitätsproblem

Aus der Bedingung für indifferentes Gleichgewicht,

$$\delta^2 \Pi^* = [\delta \mathbf{q}^T \delta \lambda^T] \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q} \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \dots \quad (9)$$

ergibt sich das Beulkriterium zu

$$\text{Det} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = 0 \quad \dots \quad (10)$$

Bei Beschränkung auf lineares Vorbeulverhalten folgt die Tangentensteifigkeitsmatrix zu

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \chi \mathbf{N}_1(\bar{\mathbf{q}}) \quad \dots \quad (11)$$

wobei  $\chi$  einen Proportionalitätsfaktor und  $\bar{\mathbf{q}}$  den Verschiebungsvektor zufolge einer Referenzlast  $\bar{\mathbf{p}}$  darstellt. Die gesuchte Größe  $\chi = \chi_{kr}$  wird durch Nullstellensuche des aus Gleichung (10) hervorgehenden charakteristischen Polynoms bestimmt.

## 3. Beschreibung der geometrischen Form des Übergangsstückes

Die Erzeugende des Übergangsstückes wird durch ein sogenanntes hyperoskulaturisches Polynom — im folgenden mit HP abgekürzt — beschrieben.

Das erwähnte Polynom lässt sich formal wie folgt anschreiben:

$$\mathbf{x}(y) = H_{01}^{(2)} x_1 + H_{02}^{(2)} x_2 + H_{12}^{(2)} x'_2 + H_{22}^{(2)} x''_2 \quad \dots \quad (12)$$

Die Koeffizienten  $x_1$  und  $x_2$  bedeuten die Koordinaten der Punkte 1 und 2 (Bild 1);  $x'_2$  und  $x''_2$  stellen die erste bzw. zweite Ableitung im Punkt 2 dar. Die Ausdrücke  $H_{rs}^{(2)}$  symbolisieren Polynome, deren  $r$ -te Ableitung im Knotenpunkt  $s$  ( $s = 1$  v 2) gleich 1 ist. Die Funktionswerte der Polynome sowie die ersten und zweiten Ableitungen (mit Ausnahme der zuvor erwähnten Ableitung) verschwinden in beiden Knotenpunkten. Die besagten Polynome ergeben sich zu [12]

$$H_{01}^{(2)} = \frac{1}{a^5} (a^5 - 10a^2y^3 + 15ay^4 - 6y^5) \quad \dots \quad (13.1)$$

$$H_{02}^{(2)} = \frac{1}{a^5} (- + 10a^2y^3 - 15ay^4 + 6y^5) \quad \dots \quad (13.2)$$

$$H_{12}^{(2)} = \frac{1}{a^4} (- - 4a^2y^3 + 7ay^4 - 3y^5) \quad \dots \quad (13.3)$$

$$H_{22}^{(2)} = \frac{1}{2a^3} (+ a^2y^3 - 2ay^4 + y^5) \quad \dots \quad (13.4)$$

wobei  $a = y_2 - y_1$  ist.

Das HP gewährleistet einen stetigen Übergang der Krümmungen der Erzeugenden an den Anschlüssen des Übergangsstückes an den Zylinder oder an die Kugelkalotte. Flächengeometrische Kenngrößen wie Lamésche Parameter, Krümmungsradien sowie deren Ableitungen, die für die numerische Untersuchung benötigt werden, können nun unschwer berechnet werden.

## 4. Numerische Untersuchungen

### 4.1 Deformationsproblem

Aus einer Reihe von untersuchten Modellen werden drei typische Modelle herausgegriffen. Sie werden mit D1, D2 und D3 bezeichnet. Die Ergebnisse werden mit den in [1] angegebenen Resultaten für ein torusförmiges Übergangsstück verglichen. Bild 3 enthält eine Prinzipskizze eines derartigen Modells. Die strichlierte Kurve stellt die Erzeugende des torusförmigen Übergangsstückes dar. Die Abbildung vermittelt ferner einen Überblick über den Krümmungsverlauf in der Erzeugendenrichtung. In Tafel 1 sind die maßgebenden Abmessungen und Werkstoffkennwerte zusammengefaßt. Für die in Bild 3 und Tafel 1 aufscheinenden Abkürzungen gilt in alphabetischer Reihenfolge:

$a_p$	axiale Abmessung eines Übergangsstückes, bei welchem die Erzeugende durch ein HP beschrieben wird
$a_T$	axiale Abmessung eines torusförmigen Übergangsstückes
$E$	Elastizitätsmodul
$H_p$	Höhe eines Kesselbodens, bei welchem die Erzeugende des Übergangsstückes durch ein HP beschrieben wird
$H_T$	Höhe eines Kesselbodens mit torusförmigem Übergangsstück
$k$	Krümmung der Erzeugenden
$k_{ext}$	Krümmungsextrem der Erzeugenden des Übergangsstückes

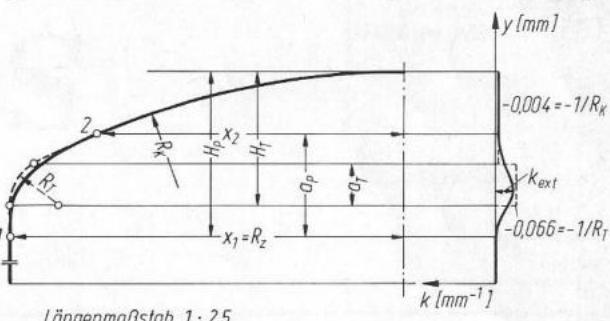


Bild 3. Prinzipskizze eines Modells aus der Serie D1, D2 und D3  
(Krümmungsmaßstab richtigerweise: 1 cm  $\triangleq 0,25 \text{ mm}^{-1}$ )

Tafel 1. Abmessungen und Werkstoffkennwerte der Kesselböden D1, D2 und D3

	$a_p$ [mm]	$H_p$ [mm]	$k_{\text{ext}}$ [mm $^{-1}$ ]	$x_2$ [mm]	$x'_2$ [0]	$x''_2$ [mm $^{-1}$ ]	$a_T$ [mm]	$H_T$ [mm]	$R_K$ [mm]	$R_T$ [mm]	$R_Z = x_1$ [mm]	$t$ [mm]	$x'_1$ [0]	$x''_1$ [mm $^{-1}$ ]	$E$ [kN/m $^2$ ]	$\mu$ [0]
D1	$13,5 = a_T$	$43,0 = H_T$	-0,160	118,9	-1,888	-0,038	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
D2	28,0	$43,0 = H_T$	-0,099	86,0	-2,778	-0,101	13,5	43,0	254,0	15,2	127,0	1,0	0,000	0,000	$207 \cdot 10^6$	0,3
D3	61,0	71,1	-0,026	70,6	-3,455	-0,183	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑

 $R_K$  Radius der Kugelkalotte $R_T$  Radius eines torusförmigen Übergangsstückes $R_Z$  Radius des Zylinders $t$  Wandstärke $x_1, x'_1, x''_1, x_2, x'_2, x''_2$  Funktionswert, erste und zweite Ableitung im Punkt 1 und 2 $\mu$  Querdehnungszahl

Kesselboden D1 weist die gleiche Höhe wie der Kesselboden mit torusförmigem Übergangsstück auf. Es gilt also  $H_p = H_T$ . Bei diesem Kesselboden ist überdies die axiale Abmessung des Übergangsstückes gleich derjenigen beim torusförmigen Übergangsstück, das heißt  $a_p = a_T$ . Beim Kesselboden D2 ist zwar auch  $H_p = H_T$ , jedoch rückt bei diesem Kesselboden das kalottenseitige Ende des Übergangsstückes im Vergleich zum torusförmigen Übergangsstück in Richtung Pol der Kalotte. Es gilt somit  $a_p > a_T$ . Der Kesselboden D3 schließlich weist eine größere Höhe als der Kesselboden mit torusförmigem Übergangsstück auf. Darüber hinaus ist auch die Entwicklungshöhe des Übergangsstückes größer als die des torusförmigen Übergangsstückes. Es gilt folglich  $H_p > H_T$  und  $a_p > a_T$ .

In Anlehnung an [1] beträgt der für die Ermittlung der Verschiebungen zugrunde gelegte Innendruck  $p = 172,5 \text{ kN/m}^2$ . Um auch die Schnittkräfte mit den in [1] angegebenen Resultaten für das torusförmige Übergangsstück bequem vergleichen zu können, wurde für die Berechnung der Schnittkräfte  $p = 703,8 \text{ kN/m}^2$  gewählt.

Da sowohl Rotationssymmetrie der Anordnung als auch der Belastung vorliegt, genügt es, jeweils einen Sektor der zu untersuchenden Kesselböden zu betrachten. Bild 4 zeigt einen in einzelne gekrümmte, dreiecksförmige Finite Elemente zerlegten Sektor eines Kesselbodens. Der Öffnungswinkel des Sektors wurde willkürlich zu  $15^\circ$  gewählt. In der Abbildung sind die Knotenpunktsnummern einiger markanter Knotenpunkte eingetragen. Im Bereich des Übergangsstückes und im oberen Teil des Zylinders wurde das Netz deshalb verfeinert, weil in diesem Bereich große Gradienten der maßgebenden Zustandsgrößen zu erwarten sind. Die Abbildung enthält ferner das bereits erwähnte krummlinige, orthogonale Koordinatensystem  $\alpha, \beta$ . Die Randbedingungen für das vorliegende Problem sind in Tafel 2 zusammengestellt. Die Ziffern 0 und 1 bezeichnen aktive und unterdrückte Freiheitsgrade. Der Grund für die Anordnung sogenannter Zwillingspunkte an den beiden Enden des Übergangsstückes ist die Unstetigkeit der Krümmungen im Falle

Tafel 2. Randbedingungen für die Kesselböden D1, D2 und D3

	$u$	$\frac{\partial u}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial u}{\partial \beta}$	$v$	$\frac{\partial v}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial v}{\partial \beta}$	$w$	$\frac{\partial w}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial w}{\partial \beta}$
Knotenpunkte in den Elementsecken (mit Ausnahme der Punkte 1, 3, 245)	1	1	1	0	1	0	0	1	0
Umfangslagerung des zylindrischen Sektors (Punkte 1 und 3)	1	1	1	1	1	0	0	1	0
Pol der Kugelkalotte (Punkt 245)	1	1	1	1	1	1	0	1	1
Elementsschwerpunkte	1	—	—	0	—	—	0	—	—

des torusförmigen Übergangsstückes. Was Übergangsstücke anbelangt, deren Erzeugende durch ein HP beschrieben werden, so liegt Stetigkeit der Krümmungen an den beiden Enden des Übergangsstückes vor. Folglich ist für die Zwillingspunkte (113, 116), (115, 118), (180, 183) und (182, 185) Kontinuität in den aktiven Freiheitsgraden  $v, \frac{\partial v}{\partial \beta}, w$  und  $\frac{\partial w}{\partial \beta}$  zu fordern. Was die Zwillingspunkte (114, 117) und (181, 184) betrifft, so sind entsprechende Lagrange-Multiplikatoren gleichzusetzen. Mit anderen Worten: Bei Übergangsstücken der erwähnten Form sind Zwillingspunkte an sich nicht erforderlich.

Die Bilder 5, 6 und 7 enthalten Vergleiche von Resultaten für die Kesselabschlußböden D1, D2 und D3 mit Ergebnissen für einen Kesselabschlußboden mit torusförmigem Übergangsstück. Verglichen werden jeweils Transversalverschiebungen  $w$ , Axialkräfte in Umfangsrichtung,  $N_\alpha$ , und Biegemomente in Erzeugendenrichtung,  $M_\beta$ . Alle erwähnten Größen sind in den Bildern 5, 6 und 7 längs Erzeugenden der Behälterböden aufgetragen.

Es zeigt sich, daß die Ergebnisse für den Kesselabschlußboden D1 eindeutig ungünstiger als die Vergleichswerte für den Kesselabschlußboden mit torusförmigem Übergangsstück sind. Der Grund hierfür liegt vor allem darin, daß der Betrag des Krümmungsextrem der Erzeugenden des Kesselabschlußbodens D1,  $|k_{\text{ext}}| = 0,160 \text{ mm}^{-1}$ , beträchtlich größer als der Betrag der Krümmung des torusförmigen Übergangsstückes ist, nämlich  $|k| = 0,066 \text{ mm}^{-1}$ . Der stetige Übergang der Krümmungen an den beiden Enden des Übergangsstückes bewirkt offensichtlich keine Umkehr des Sachverhaltes.

Der Trend beim Kesselabschlußboden D2 ist im Vergleich zum Kesselabschlußboden D1 insofern günstiger, als der Betrag des Krümmungsextrem bei ersterem,  $|k_{\text{ext}}| = 0,099 \text{ mm}^{-1}$ , wesentlich kleiner als der zuvor angegebene, analoge Wert beim Kesselabschlußboden D1 ist. Nichtdestoweniger zeigt ein Vergleich der Ergebnisse für den Kesselabschlußboden D2 mit den Resultaten für den Behälterabschlußboden mit torusförmigem Übergangsstück, daß letzterer trotz Unstetigkeit in den Krümmungen an den beiden Enden des Übergangsstückes und trotz geringerer Entwicklungshöhe des Übergangsstückes wegen des geringeren Absolutbetrages der Krümmung annähernd gleich günstig wie der Kesselabschlußboden D2 ist.

Die Resultate für Kesselabschlußboden D3 sprechen für sich. Aufgrund des vergleichsweise sehr kleinen Absolutbetrages des Krümmungsextrem,  $|k_{\text{ext}}| = 0,026 \text{ mm}^{-1}$ , kommt es zu einer entscheidenden Reduzierung der Druckkraft in Umfangsrichtung sowie des Biegemomentes in Erzeugendenrichtung.

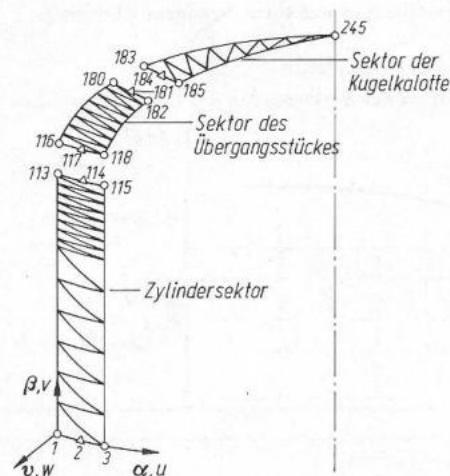


Bild 4. Finite-Elemente Modell eines Sektors eines Kesselbodens

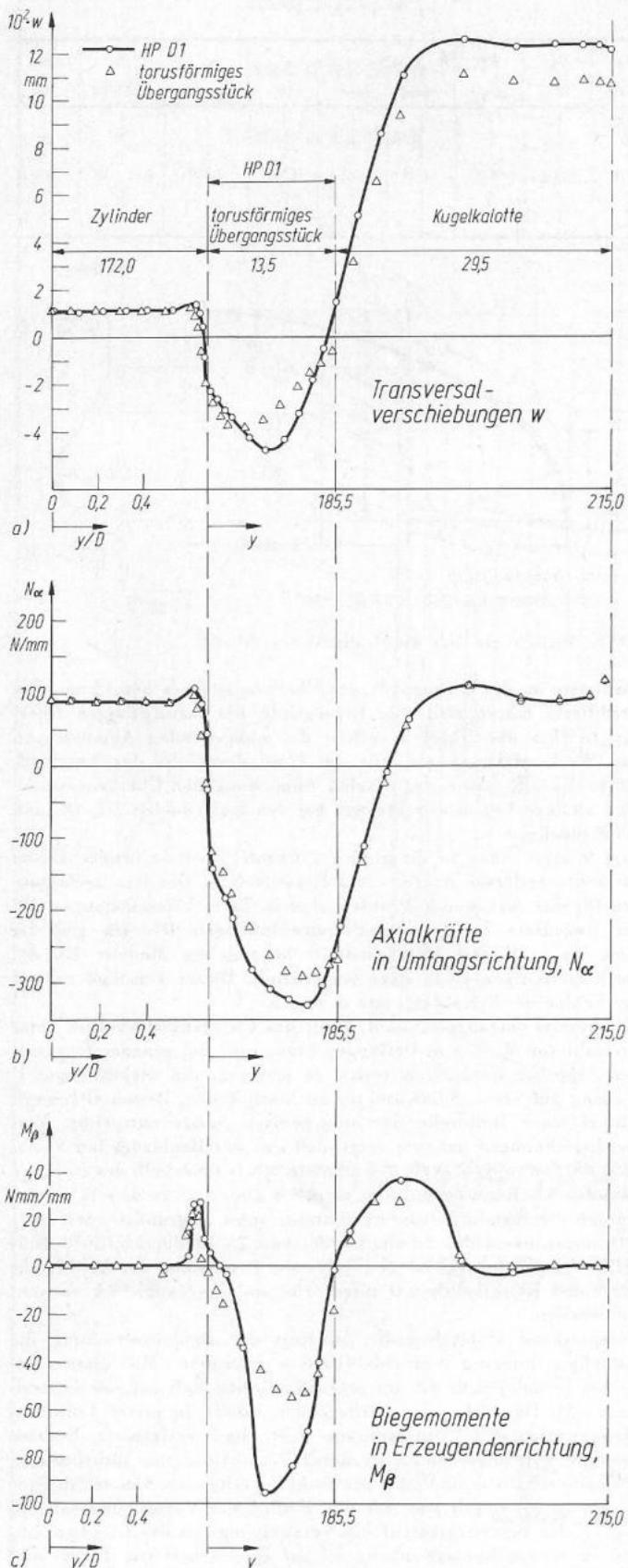


Bild 5. Kesselboden D1 — Ergebnisvergleich mit Kesselboden mit torusförmigem Übergangsstück

#### 4.2 Stabilitätsproblem

Es werden Beuldrücke für fünf Modelle von Abschlußböden berechnet. Die Modelle werden mit B1—B5 bezeichnet. Abmessungen und Werkstoffkennwerte der Abschlußböden werden so gewählt,

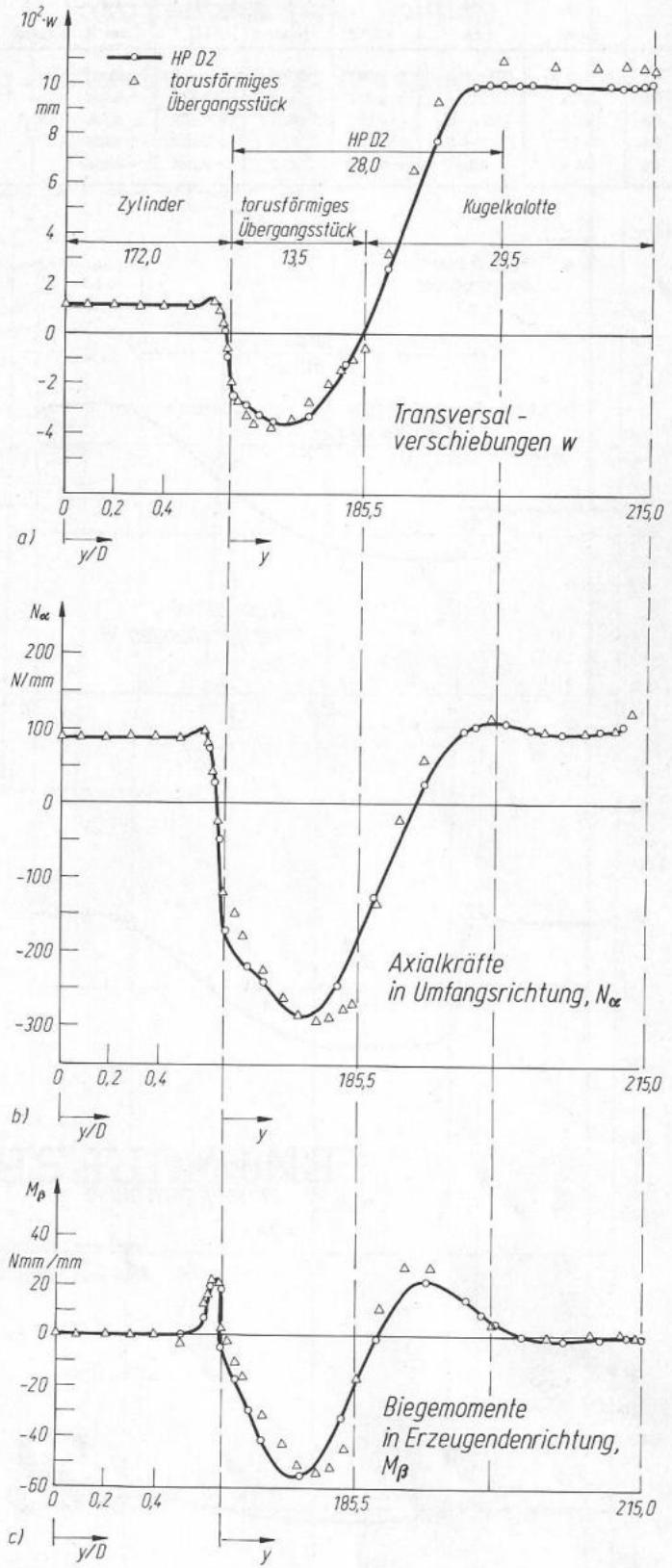


Bild 6. Kesselboden D2 — Ergebnisvergleich mit Kesselboden mit torusförmigem Übergangsstück

dass die Ergebnisse mit dem in [1] angegebenen Resultat für einen Behälterabschlußboden mit torusförmigem Übergangsstück ohne Schwierigkeit verglichen werden können. Bild 8 enthält eine Prinzipskizze eines derartigen Modells. Mit  $a$  und  $b$  werden Tangenten-

Tafel 3. Abmessungen und Werkstoffkennwerte der Kesselböden B1—B5

	$a_p$ [mm]	$H_p$ [mm]	$k_{ext}$ [mm $^{-1}$ ]	$x_2$ [mm]	$x''_2$ [0]	$a_T$ [mm $^{-1}$ ]	$H_T$ [mm]	$R_K$ [mm]	$R_T$ [mm]	$R_Z = x_1$ [mm]	$t$ [mm]	$x'_1$ [0]	$x''_1$ [mm $^{-1}$ ]	$E$ [kN/m $^2$ ]	$\mu$ [0]
B1	37,8 = $a_T$	73,7 = $H_T$	-0,041	113,8	-1,428	-0,027									
B2	39,5	75,4	-0,041	113,8	-1,428	-0,027									
B3	46,0	73,7 = $H_T$	-0,032	101,1	-1,689	-0,038	37,8	73,7	198,4	46,2	133,5	0,2	0,000	3,11 · 10 <sup>6</sup>	0,3
B4	53,3	73,7 = $H_T$	-0,032	87,8	-2,028	-0,058									
B5	61,8	82,3	-0,024	87,8	-2,028	-0,058									

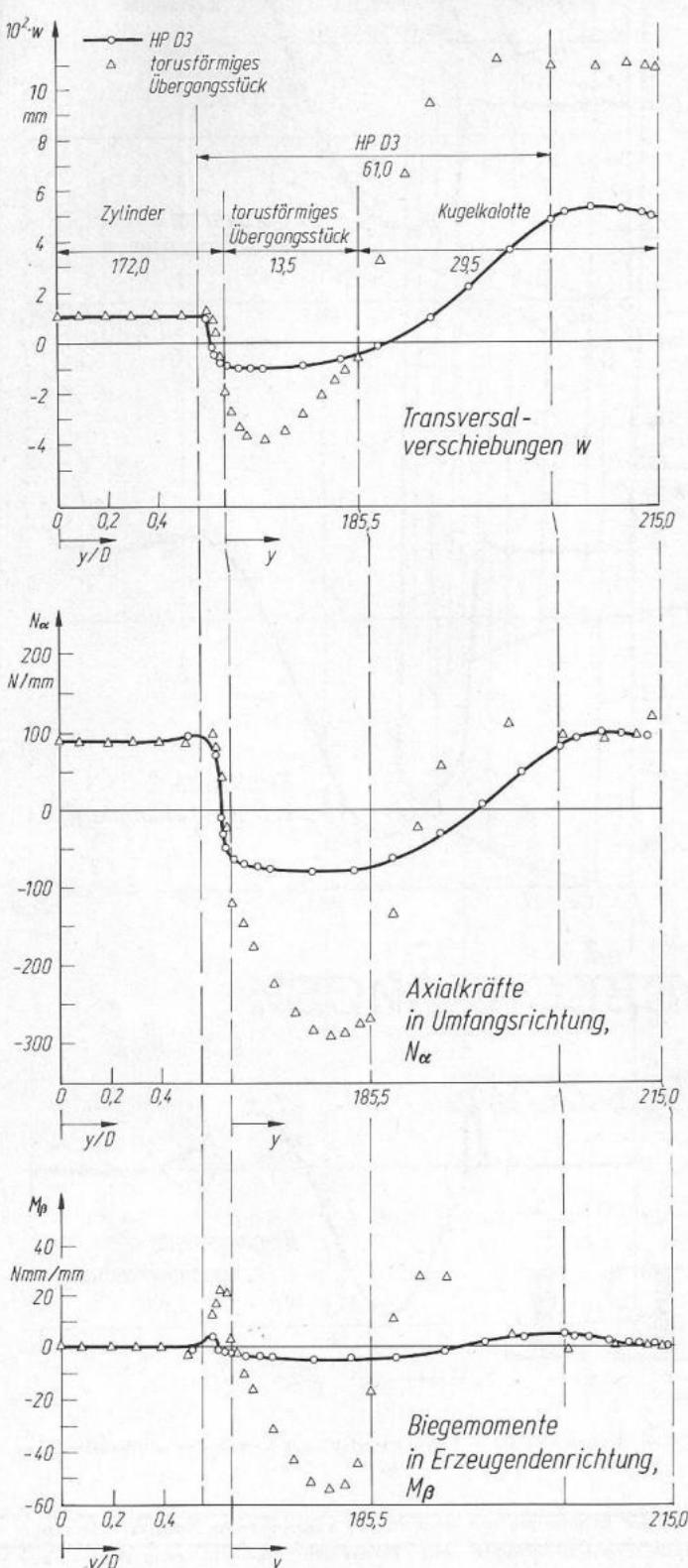


Bild 7. Kesselboden D3 — Ergebnisversuch mit Kesselboden mit torusförmigem Übergangsstück

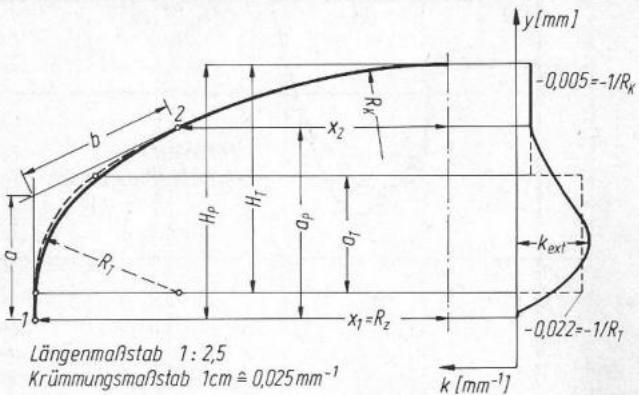


Bild 8. Prinzipskizze eines Modells aus der Serie B1—B5

abschnitte an die Erzeugende des Übergangsstückes bezeichnet. Die strichlierte Kurve stellt die Erzeugende des torusförmigen Übergangsstückes dar. Tafel 3 enthält die maßgebenden Abmessungen und Werkstoffkennwerte. Für die Wahl der Höhe der Abschlußböden B1—B5 sowie der axialen Abmessung der Übergangsstücke sind analoge Gesichtspunkte wie bei den Kesselböden D1, D2 und D3 maßgebend.

Bild 9 zeigt einen in einzelne gekrümmte, dreiecksförmige Finite Elemente zerlegten Sektor eines Kesselbodens. Die Randbedingungen für das vorliegende Problem sind in Tafel 4 zusammengestellt. Im Gegensatz zu den Behälterabschlußböden D1, D2 und D3 sind die in diesem Unterabschnitt behandelten Modelle B1—B5 am kesselseitigen Ende starr eingespannt. Dieser Umstand erklärt das Fehlen des Zylindersektors in Bild 9.

Wie bereits eingangs erwähnt, beult das Übergangsstück nach einer Vielzahl von Wellen in Umfangsrichtung aus. Bei genauer Kenntnis der Zahl der Beulwellen würde es genügen, die Stabilitätsuntersuchung auf einen Schalensektor zu beschränken, dessen Öffnungswinkel einer Halbwelle der ausgebeulten Schale entspricht. Vergleichsrechnungen haben gezeigt, daß sich der Beuldruck bei Variation des Öffnungswinkels des Schalensektors innerhalb des in Frage kommenden Bereichs nur unwesentlich ändert. Aus diesem Grund werden die Instabilitätsuntersuchungen unter Zugrundelegung eines Öffnungswinkels des Schalensektors von  $2\pi/70$  durchgeführt. Der selbe Öffnungswinkel ist in [1] für die Ermittlung des Beuldrucks für einen Kesselboden mit torusförmigem Übergangsstück verwendet worden.

Entsprechend Unterabschnitt 2.6 liegt der Beuluntersuchung die Annahme linearen Vorbeulverhaltens zugrunde. Mit dieser Annahme befindet man sich im gegenständlichen Fall auf der sicheren Seite [1]. Da es bei der vorliegenden Studie in erster Linie um eine vergleichende Untersuchung geht, sind verfeinerte Rechenmodelle, gekennzeichnet etwa durch Berücksichtigung nichtlinearer Vorbeulverhaltens und/oder plastischen Verhaltens, von sekundärer Bedeutung. Dies gilt auch für den Einfluß der Verschiebungsabhängigkeit des Innendrucks auf die Verzweigungslast des Gleichgewichtes. In diesem Zusammenhang sei auf eine Arbeit von Floegl und Mang [13] verwiesen, in der unter anderem für einen hyperbolischen Kühlurm unter Windbeanspruchung gezeigt worden ist, daß die Verschiebungsabhängigkeit der Windbeanspruchung keinen Einfluß auf den Beuldruck hat. Da der Einfluß der Verschiebungsabhängigkeit einer Druckbeanspruchung im Regelfall mit zunehmender Anzahl der Beulwellen abnimmt, spielt der erwähnte Effekt bei Kesselböden unter Innendruck, die nach beträchtlich mehr Wellen als Kühlturnschalen ausbeulen, keine Rolle.

Tafel 4. Randbedingungen für die Kesselböden B1—B5

	$u$	$\frac{\partial u}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial u}{\partial \beta}$	$v$	$\frac{\partial v}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial v}{\partial \beta}$	$w$	$\frac{\partial w}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial w}{\partial \beta}$
Knotenpunkte in den Elementseiten (mit Ausnahme der Punkte 1, 3, 5 und 207)	1	1	1	0	1	0	0	1	0
Umfangslagerung des Sektors (Punkte 1, 3, 5)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Pol der Kugelkalotte (Punkt 207)	1	1	1	1	1	1	0	1	1
Elementsschwerpunkte	1	—	—	0	—	—	0	—	—

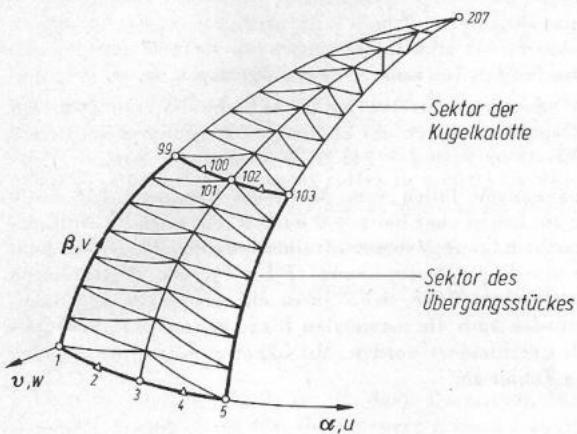


Bild 9. Finite-Elemente Modell eines Sektors eines Kesselbodens

Tafel 5 enthält bezogene Beuldrücke  $p_{kr}^{(T)} / p_{kr}^{(HP)}$  für die Kesselböden B1—B5. Mit  $p_{kr}^{(T)}$  und  $p_{kr}^{(HP)}$  werden der Beuldruck für den Kesselboden mit torusförmigem Übergangsstück bzw. mit einem Übergangsstück, dessen Erzeugende durch ein HP beschrieben wird, bezeichnet. Die Ergebnisse stellen eine logische Konsequenz der aus der Lösung des Spannungsproblems gewonnenen Erkenntnisse dar. Der Beuldruck nimmt mit zunehmendem Betrag des Krümmungsextrem der Erzeugenden ab. Die Abnahme des Beuldrucks lässt sich aber zum Teil durch Anordnung von Übergangsstücken mit stetigen Übergängen der Krümmungen an ihren Enden rückgängig machen.

Tafel 5. Bezogene Beuldrücke

	B1	B2	B3	B4	B5
$p_{kr}^{(T)} / p_{kr}^{(HP)}$	1/0,53	1/0,53	1/1,19	1/1,31	1/2,41

## 5. Schlußfolgerungen

Die aus der vorliegenden Arbeit gezogenen Schlußfolgerungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Für das Ausmaß an Druckspannungen im Übergangsstück von Kesselböden und in weiterer Folge für die Beulsicherheit derartiger Kesselabschlüsse ist es nicht unerheblich, ob an den beiden Enden der Übergangsstücke Unstetigkeiten in den Krümmungen der Erzeugenden auftreten oder nicht.
2. Die Beulsicherheit nimmt mit abnehmendem Betrag des Krümmungsextrem der Erzeugenden zu.

3. Übergangsstücke, deren Erzeugende durch ein hyperoskulatorisches Polynom (HP) beschrieben werden, benötigen zur Kleinhaltung des Betrages der Krümmung der Erzeugenden eine gewisse Entwicklungshöhe  $a_p$  des Übergangsstückes. Nun kann aber, wie numerische Untersuchungen gezeigt haben,  $a_p$  nicht beliebig gewählt werden. Optimale Verhältnisse ergeben sich für  $a : b = 1 : 1,3$ , wobei  $a$  und  $b$  Tangentenabschnitte an die Erzeugende sind (s. Bild 8). Bei einer Verlängerung des Übergangsstückes in den Bereich des Zylinders beginnt die durch das HP beschriebene Erzeugende zu oszillieren. Andererseits ergibt sich bei einer Verlängerung des Übergangsstückes in den Bereich der Kugelkalotte nur eine unwesentliche Verkleinerung des Betrages des Krümmungsextrems.

4. Die Lage der Erzeugenden, die durch ein HP beschrieben wird, weicht, wie Bild 8 zeigt, relativ wenig von der Lage der Erzeugenden eines torusförmigen Übergangsstückes ab. Die Form des Abschlußbodens wird bei Verwendung eines HOPoid-Übergangsstückes anstatt eines torusförmigen Übergangsstückes nur geringfügig geändert. HOPoid-Übergangsstücke bewirken bei ausreichender Entwicklungshöhe eine beträchtliche Erhöhung des Beuldrucks.

Die Autoren danken dem Fonds „150 Jahre Wiener Technische Hochschule“ der Handelskammer Wien, der die vorliegende Arbeit unterstützt hat.

## Schrifttum

- [1] Kanodia, V. L., Gallagher, R. H., und Mang, H. A.: Instability Analysis of Torispherical Pressure Heads with Triangular Thin-Shell Finite Elements. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Pressure Vessel Technology 99 (1977), S. 64—74.
- [2] Flügge, W.: Statik und Dynamik der Schalen. 3. Auflage, Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1962.
- [3] Galletly, G. D.: Torispherical Shells—A Caution to Designers. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Series B, Vol. 81, No. 1, Feb. 1959, S. 51—62.
- [4] Shield, R. T., und Drucker, D. C.: Design of Thin-Walled Torispherical and Toriconical Pressure Vessel Heads. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Series E, Vol. 83, Juni 1961, S. 292—297.
- [5] Adachi, J., und Benicek, M.: Buckling of Torispherical Shells under Internal Pressure. Experimental Mechanics, Aug. 1964, S. 217—222.
- [6] Bushnell, D., und Galletly, G. D.: Stress and Buckling of Internally Pressurized, Elastic-Plastic Torispherical Vessel Heads — Comparisons of Test and Theory. Petroleum Mechanical Engineering and Pressure Vessels and Piping Conference, Mexico City, Mexico, Sept. 1976, Paper No. 76-PVP-23, S. 1—14 (Preprint).
- [7] Bushnell, D.: Nonsymmetric Buckling of Internally Pressurized Ellipsoidal and Torispherical Elastic-Plastic Pressure Vessel Heads. Petroleum Mechanical Engineering and Pressure Vessels and Piping Conference, Mexico City, Mexico, Sept. 1976, Paper No. 76-PVP-25, S. 1—10 (Preprint).
- [8] Mang, H. A., Gallagher, R. H., und Kanodia, V. L.: FESIA (Finite Element Shell Instability Analysis). User's Manual, Department of Structural Engineering, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, New York, Juni 1976.
- [9] Mang, H. A., Gallagher, R. H., Cedolin, L., und Torszky, P.: Deformation und Stabilität windbeanspruchter Kühlturnschalen. Ingenieurarchiv 47 (1978), S. 391—410.
- [10] Koiter, W. T.: A Consistent First Approximation in the Theory of Thin Elastic Shells. Proceedings of IUTAM Symposium on Theory of Thin Elastic Shells, Amsterdam 1960.
- [11] Mang, H. A.: Derivation of General Algebraic Constraint Conditions for „Weak“ C<sub>1</sub>-Continuity for Thin Shells. Int. J. Num. Meth. Engng. 11 (1977), S. 1593—1604.
- [12] Bogner, F. K., Fox, R. L., und Schmit, L. A., Jr.: The Generation of Inter-Element-Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulas. Proceedings of the First Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965, S. 397—443.
- [13] Floegl, H., und Mang, H.: Zum Einfluß der Verschiebungshäufigkeit ungleichförmigen hydrostatischen Drucks auf das Ausbeulen dünner Schalen allgemeiner Form. Ingenieurarchiv 50 (1981), S. 15—30.

Die Schriftleitung weist noch hin auf Eblinger, M.: Statische Berechnung von Kesselböden. 1952 Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, Darmstädter Dissertation.